第21講　球の取り扱い

21　原点を O(0, 0, 0) とし，空間の３点を A(0, −2, 2)，B(1, 1, 1)，C(0, 0, 1) とする．点Cを中心とする半径１の球を S として，S 上の点をＰとする．また xy 平面上の点を Q(X, Y, 0) とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$X=Y=1$ としたとき，直線 AQ と球面 S との２つの交点を，点Ａに近い方から P_1，P_2 とする．このとき，$AP_1 : P_1P_2 : P_2Q$ を求めよ．

(2)　点Ｐが３点 O，A，B で定まる平面上を動くとき，点Ｐの軌跡はある点を中心とする円になる．この円の中心と半径を求めよ．また，点Ｐの z 座標のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　点Ｐは CP⊥AP を満たしながら動くとする．点Ｑが直線 AP 上にあるとき，点Ｑの軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　球の取り扱い

21　空間の点 $(10,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径9の球面を S_1 とし，点 $(0,\ 10,\ 0)$ を中心とする半径8の球面を S_2 とする．S_1 と S_2 に接し，原点を通る直線の大きさ1の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c \geqq 0)$ をすべて求めよ．

【選択肢】

㋐　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \mp\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$　(複号同順)

㋑　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$　(複号同順)

㋒　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$　(複号任意)

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　球の取り扱い

21　原点をO(0, 0, 0)とし，空間の3点をA(0, −2, 2)，B(1, 1, 1)，C(0, 0, 1)とする．点Cを中心とする半径1の球をSとして，S上の点をPとする．またxy平面上の点をQ(X, Y, 0)とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$X=Y=1$としたとき，直線AQと球面Sとの2つの交点を，点Aに近い方からP_1，P_2とする．このとき，$AP_1:P_1P_2:P_2Q$を求めよ．

(2)　点Pが3点O，A，Bで定まる平面上を動くとき，点Pの軌跡はある点を中心とする円になる．この円の中心と半径を求めよ．また，点Pのz座標のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　点Pは$CP\perp AP$を満たしながら動くとする．点Qが直線AP上にあるとき，点Qの軌跡を求めよ．

【答】 (1) $(4-\sqrt{2}):2\sqrt{2}:(3-\sqrt{2})$　(2) 中心$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$，半径$\frac{\sqrt{30}}{6}$，$0\leqq z\leqq\frac{5}{3}$

(3) 平面$z=0$上の放物線$y=\frac{x^2-1}{2}$

【解答】

(1)　直線AQ上の点は実数tを用いて$(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OQ}=(t, 3t-2, -2t+2)$と表せ，この点と点Cとの距離が1であるので

$$(t-0)^2+(3t-2-0)^2+(-2t+2-1)^2=1$$
$$7t^2-8t+2=0$$
$$\therefore\quad t=\frac{4\pm\sqrt{2}}{7}$$

よって

$$AP_1:P_1P_2:P_2Q=\frac{4-\sqrt{2}}{7}:\left(\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right):\left(1-\frac{4+\sqrt{2}}{7}\right)$$
$$=\mathbf{(4-\sqrt{2}):2\sqrt{2}:(3-\sqrt{2})}$$

(2)　点Cから3点O，A，Bで定まる平面に下ろした垂線の足をHとすると，Hは題意の円の中心である．Hは平面OAB上の点より，実数α，βを用いて，$\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$と表せ，$CH\perp OA$より

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=\alpha|\overrightarrow{OA}|^2+\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0\quad\cdots\cdots①$$

また$CH\perp OB$より同様に

$$\alpha\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\beta|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=0\quad\cdots\cdots②$$

を得る．

ここで$|\overrightarrow{OA}|^2=8$，$|\overrightarrow{OB}|^2=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=1$であるので，①と②より

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$8\alpha-2=0,\ 3\beta-1=0 \qquad \therefore\ \ \alpha=\frac{1}{4},\ \beta=\frac{1}{3}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$

ゆえに円の中心は

$$\mathbf{H}\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$$

また，三角形 PHC は $\angle\mathrm{PHC}=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形になるので，円の半径は

$$\mathrm{HP}=\sqrt{\mathrm{CP}^2-\mathrm{CH}^2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

次に $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおく．P は平面 OAB 上の点より実数 s，t を用いて，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t,\ -2s+t,\ 2s+t)$ と表せるので

$$\begin{cases} x=t & \cdots\cdots③ \\ y=-2s+t & \cdots\cdots④ \\ z=2s+t & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

となる．また，CP＝1 より　$x^2+y^2+(z-1)^2=1$　……⑥　を得る．
③～⑤より $-2x+y+z=0$ すなわち $y=2x-z$ となるが，これを⑥に代入して

$$x^2+(2x-z)^2+(z-1)^2=1$$
$$5x^2-4zx+2z^2-2z=0$$

よって，x が実数であることより，判別式を考えて

$$(-2z)^2-5(2z^2-2z)\geqq 0$$
$$-2z(3z-5)\geqq 0$$
$$\therefore\ \ \mathbf{0\leqq z\leqq \frac{5}{3}}$$

(3)　$\mathrm{CP}\perp\mathrm{AP}$ であるので $\angle\mathrm{CAP}=\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2}\end{aligned}$$

より

$$(X,\ Y+2,\ -2)\cdot(0,\ 2,\ -1)=\sqrt{X^2+(Y+2)^2+(-2)^2}\sqrt{5-1}$$
$$Y+3=\sqrt{X^2+(Y+2)^2+4}$$
$$Y+3\geqq 0 \text{ かつ } (Y+3)^2=X^2+(Y+2)^2+4$$
$$Y=\frac{X^2-1}{2} \text{ かつ } Y\geqq -3$$

となるので，点 Q の軌跡は

平面 $z=0$ 上の放物線 $y=\frac{x^2-1}{2}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　球の取り扱い

21　空間の点 (10，0，0) を中心とする半径9の球面を S_1 とし，点 (0，10，0) を中心とする半径8の球面を S_2 とする．S_1 と S_2 に接し，原点を通る直線の大きさ1の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c \geqq 0)$ をすべて求めよ．

【選択肢】

㋐　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{10},\ \mp\frac{3}{5},\ \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号同順）

㋑　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\frac{3}{5},\ \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号同順）

㋒　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\frac{3}{5},\ \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

【答】 ㋒

【解答】

$\vec{x}=\frac{1}{10}(10,\ 0,\ 0)$，$\vec{y}=\frac{1}{10}(0,\ 10,\ 0)$ とし，$\vec{l}=(a,\ b,\ c)$ とおく．

$\vec{x}$ と $\vec{l}$，$\vec{y}$ と $\vec{l}$ のなす角をそれぞれ α，β とすると

$$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{10^2-9^2}}{10}=\pm\frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{10^2-8^2}}{10}=\pm\frac{3}{5}$$

より

$$\vec{x}\cdot\vec{l}=|\vec{x}||\vec{l}|\cos\alpha \qquad \therefore\ a=\pm\frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$\vec{y}\cdot\vec{l}=|\vec{y}||\vec{l}|\cos\beta \qquad \therefore\ b=\pm\frac{3}{5}$$

ここで $|\vec{l}|=1$ より

$$a^2+b^2+c^2=1$$

$$\frac{19}{100}+\frac{9}{25}+c^2=1 \qquad \therefore\ c=\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

よって，$c\geqq 0$ であることに注意すると

$$\vec{l}=\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\frac{3}{5},\ \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\ \text{（複号任意）}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。